

*К.Ю. Поляков,  
М.А. Ройтберг*

# **Системы логических уравнений в задачах ЕГЭ по информатике**

## Постановка задачи (ЕГЭ-2011)

---

Сколько решений имеет система уравнений:

$$x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_3 \cdot \bar{x}_4 = 1$$

$$x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_5 \cdot x_6 + x_5 \cdot \bar{x}_6 = 1$$

...

$$x_7 \cdot x_8 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 + \bar{x}_9 \cdot x_{10} + x_9 \cdot \bar{x}_{10} = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные.

2011: Решаемость 3,2%

# Методы решения

---

- 1) замена переменных
- 2) последовательное подключение уравнений
- 3) метод отображения (Е.А. Мирончик)  
(динамическое программирование)

## «Информатика. Первое сентября»

1. Е. А. Мирончик, Метод отображения // Информатика, № 10, 2013, с. 18-26.
2. Е.А. Мирончик, Люблю ЕГЭ за В15, или Еще раз про метод отображения // Информатика, № 7-8, 2014, с. 26-32.



- трудоёмко
- длинная запись решения
- арифметические ошибки

2012: Решаемость 13,2%

# Аналогии с алгеброй

## Алгебра

Обычно уравнение имеет одно или несколько решений.

*Элементарные уравнения:* линейные, квадратные.

*Методы преобразования:* законы сложения и умножения, формулы сокращенного умножения, свойства степеней.

## Логика

Уравнение может иметь большое, но конечное число решений.

*Элементарные уравнения* не выделяются.

*Методы преобразования:* законы логики (см. далее).

# Формулы логики – I

---

## А. Свойства 0, 1 и отрицания

Свойства 0 и 1

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a + 1 = 1$$

Свойства отрицания

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

$$a + \bar{a} = 1$$

$$\overline{\bar{a}} = a$$

# Формулы логики – II

## Б. Дизъюнкция и конъюнкция

Сочетательный закон

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Переместительный закон

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + b = b + a$$

Закон повторения

$$a \cdot a = a$$

$$a + a = a$$

Распределительный закон

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$$

Правила де Моргана

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

# Формулы логики – III

## В. Импликация

Определение импликации

$$a \rightarrow b = \bar{a} + b$$

Свойства импликации

$$\bar{a} \rightarrow \bar{b} = b \rightarrow a$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \rightarrow \bar{b} &= a + \bar{b} \\ &= b \rightarrow a \end{aligned}$$

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \cdot b) \rightarrow c$$

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \rightarrow c) &= \bar{a} + (b \rightarrow c) = \bar{a} + \bar{b} + c \\ (a \cdot b) \rightarrow c &= \overline{(a \cdot b)} + c = \bar{a} + \bar{b} + c \end{aligned}$$

$$a \rightarrow (b \cdot c) = (a \rightarrow b) \cdot (a \rightarrow c)$$

$$a \rightarrow (b + c) = (a \rightarrow b) + (a \rightarrow c)$$

# Формулы логики – IV

---

## Г. Эквиваленция

Представление через базис:

$$(a \equiv b) = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{(a \equiv b)} = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$



## Основные идеи

---

1) Решение системы уравнений – это битовая цепочка (*битовый вектор*)

$$X = x_1 x_2 \dots x_N \quad (x_i \in \{0,1\} \text{ для любого } i)$$

- 2) Битовый вектор рассматривается как единый объект.
- 3) Уравнения – это ограничения на битовый вектор (ограничения на комбинации битов).
- 4) Нужно выделить элементарные уравнения и записать ограничения «на русском языке».
- 5) Количество решений находится по правилам комбинаторики.

# Типичные ограничения

---

## Задача 1.

$$\underbrace{(x_1 \equiv x_2)} \cdot (x_2 \equiv x_3) \cdot \dots \cdot (x_4 \equiv x_5) = 1$$

«соседние биты одинаковы»

Решения: 00000, 11111

## Задача 2.

$$\underbrace{(x_1 \not\equiv x_2)} \cdot (x_2 \not\equiv x_3) \cdot \dots \cdot (x_4 \not\equiv x_5) = 1$$

«соседние биты различны»

«биты чередуются»

Решения: 01010, 10101

# Типичные ограничения

---

## Задача 3.

$$\underbrace{(x_1 \rightarrow x_2)} \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

«запрещена комбинация 10»

«после первой единицы все следующие биты – 1»

«все нули, потом все единицы»

*Решения:* 000000, 000001, 000011, 000111,  
001111, 011111, 111111

Для уравнения с  $N$  переменными:  $N+1$  решений.

## Более сложный пример

### Задача 4.

$$\underbrace{((x_1 + x_2) \rightarrow x_3)} \cdot ((x_2 + x_3) \rightarrow x_4) \cdot \dots \cdot ((x_4 + x_5) \rightarrow x_6) = 1$$

«запрещена комбинация  $1 \rightarrow 0$ »

«запрещена комбинация  $x_i + x_{i+1} = 1, x_{i+2} = 0$ »

«слева от каждого нулевого бита (начиная с 3-го) должны стоять два нуля»

«все нули, потом все единицы»

Решения: 000000, 000001, 000011, 000111,  
001111, 011111, 111111

**и ещё:** 101111

Для уравнения с  $N$  переменными:  $N+2$  решений.

# Более сложный пример

---

## Задача 5.

$$\underbrace{(x_1 + x_2)} \cdot (x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_5 + x_6) = 1$$

«запрещена комбинация 00»



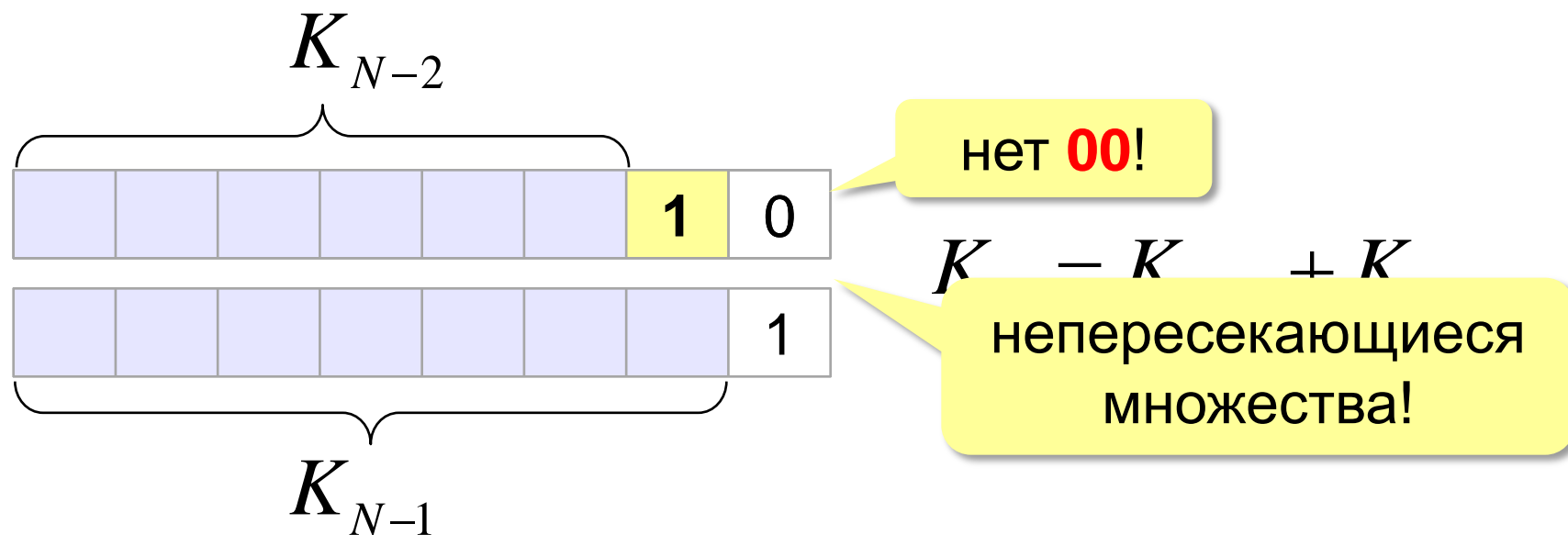
Сколько есть цепочек длиной  $N$ , в которых нет двух соседних нулей?

## Более сложный пример

$K_N$  – количество «правильных» цепочек длиной  $N$

$$K_1 = 2 \quad \{0, 1\} \qquad K_2 = 3 \quad \{01, 10, 11\}$$

Все цепочки длиной  $N$



## Более сложный пример

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = 2 \quad \{0, 1\} \\ K_2 = 3 \quad \{01, 10, 11\} \\ K_N = K_{N-1} + K_{N-2} \end{array} \right.$$



Рекурсия: ЕГЭ-11 (В6)

Динамическое

программирование:

ЕГЭ-22 (В13), ЕГЭ-15 (В9)

$$K_N$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Числа Фибоначчи  $F_N$

$$K_N = F_{N+2}$$

## Ещё пример

---

### Задача 6.

$$\underbrace{(x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3)} \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot \dots \cdot (x_4 \cdot x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

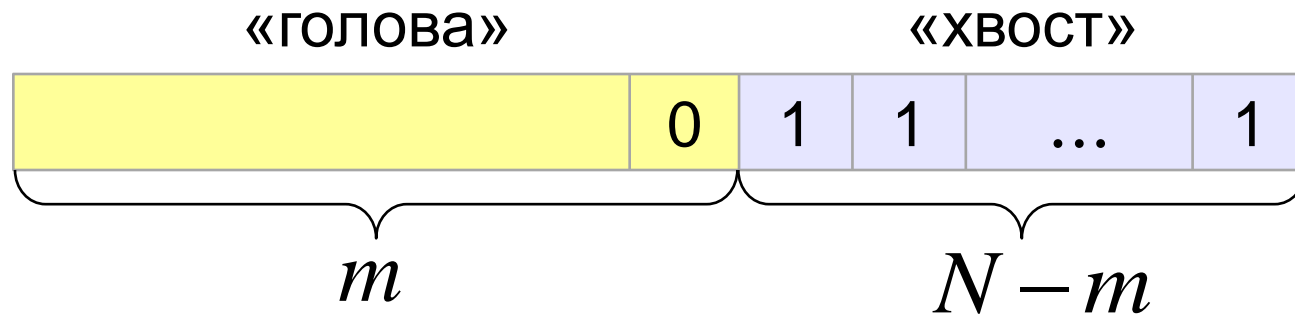
«запрещена комбинация  $1 \rightarrow 0$ »

«после двух единиц подряд следуют только единицы»



# И снова – рекуррентные уравнения

## Структура решения:



нет комбинации 11  
последний бит – 0

$m = 0$  : одна «голова» (пустая)

$m = 1$  : одна «голова» (0)

$m > 1$  :  $F_{m+1}$  «ГОЛОВ»

$$K_N = \sum_{m=0}^N F_{m+1}$$

$$N = 6: \quad K_N = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2016 $\approx$ ЕГЭ-2020

$$(\neg(x_1 \equiv y_1)) \equiv (x_2 \equiv y_2)$$

$$(\neg(x_2 \equiv y_2)) \equiv (x_3 \equiv y_3)$$

...

$$(\neg(x_8 \equiv y_8)) \equiv (x_9 \equiv y_9)$$

Замена переменных:

$$z_1 = (x_1 \equiv y_1)$$

$$z_2 = (x_2 \equiv y_2)$$

...

$$z_9 = (x_9 \equiv y_9)$$

$$\bar{z}_1 \equiv z_2, \quad \bar{z}_2 \equiv z_3, \quad \dots \quad \bar{z}_8 \equiv z_9$$

$$z_1 \not\equiv z_2, \quad z_2 \not\equiv z_3, \quad \dots \quad z_8 \not\equiv z_9$$

$$(z_1 \not\equiv z_2) \cdot (z_2 \not\equiv z_3) \cdot (z_2 \not\equiv z_3) \cdot \dots \cdot (z_8 \not\equiv z_9) = 1$$



Биты чередуются!

Решения:  $Z = 010101010$ ,  
 $Z = 101010101$

# Демо-вариант ЕГЭ-2016

Решения:  $Z = 010101010,$   
 $Z = 101010101$   
 $z_i = (x_i \equiv y_i)$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
9 битов

$$z_i = 0 \Rightarrow (x_i, y_i) = (0,1) \quad (1,0)$$

$$z_i = 1 \Rightarrow (x_i, y_i) = (0,0) \quad (1,1)$$



0 и 1 дают по  
2 решения!

$$2^9 + 2^9 = 1024$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2012

$$((x_1 \equiv x_2) + (x_3 \equiv x_4)) \cdot ((x_1 \not\equiv x_2) + (x_3 \not\equiv x_4)) = 1$$

$$((x_3 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_6)) \cdot ((x_3 \not\equiv x_4) + (x_5 \not\equiv x_6)) = 1$$

...

$$((x_7 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10})) \cdot ((x_7 \not\equiv x_8) + (x_9 \not\equiv x_{10})) = 1$$

### Замена переменных:

$$z_1 = (x_1 \equiv x_2)$$

$$(z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1$$

$$z_2 = (x_3 \equiv x_4)$$

$$(z_2 + z_3) \cdot (\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 1$$

...

...

$$z_5 = (x_9 \equiv x_{10})$$

$$(z_4 + z_5) \cdot (\bar{z}_4 + \bar{z}_5) = 1$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2012

$$(a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = (a \neq b)$$

$$(z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1$$

$$(z_1 \neq z_2) = 1$$

$$(z_2 + z_3) \cdot (\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 1$$



$$(z_2 \neq z_3) = 1$$

...

...

$$(z_4 + z_5) \cdot (\bar{z}_4 + \bar{z}_5) = 1$$

$$(z_4 \neq z_5) = 1$$

**К одному уравнению:**

$$(z_1 \neq z_2) \cdot (z_2 \neq z_3) \cdot (z_2 \neq z_3) \cdot (z_4 \neq z_5) = 1$$

**Решения:**

$$Z = 01010, \quad Z = 10101$$

# Демо-вариант ЕГЭ-2012

## Переход к исходным переменным:

$$z_i = (x_k \equiv x_{k+1})$$

$$z_i = 0 \Rightarrow (x_k, x_{k+1}) = (0,1), (1,0)$$

$$z_i = 1 \Rightarrow (x_k, x_{k+1}) = (0,0), (1,1)$$



Каждый бит в Z даёт удвоение вариантов в X!

$$Z = \underbrace{01010}_{5 \text{ бит}}, \quad Z = \underbrace{10101}_{5 \text{ бит}}$$

$$K_{10} = 2^5 + 2^5 = 64$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2013

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(\bar{y}_1 + y_2) \cdot (\bar{y}_2 + y_3) \cdot (\bar{y}_3 + y_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow x_1) \cdot (y_2 \rightarrow x_2) \cdot (y_3 \rightarrow x_3) \cdot (y_4 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow x_1) \cdot (y_2 \rightarrow x_2) \cdot (y_3 \rightarrow x_3) \cdot (y_4 \rightarrow x_4) = 1$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2013

---

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

5 решений:

$$X = 0000, 0001, 0011, 0111, 1111$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

5 решений:

$$Y = 0000, 0001, 0011, 0111, 1111$$

**Связь X и Y:**

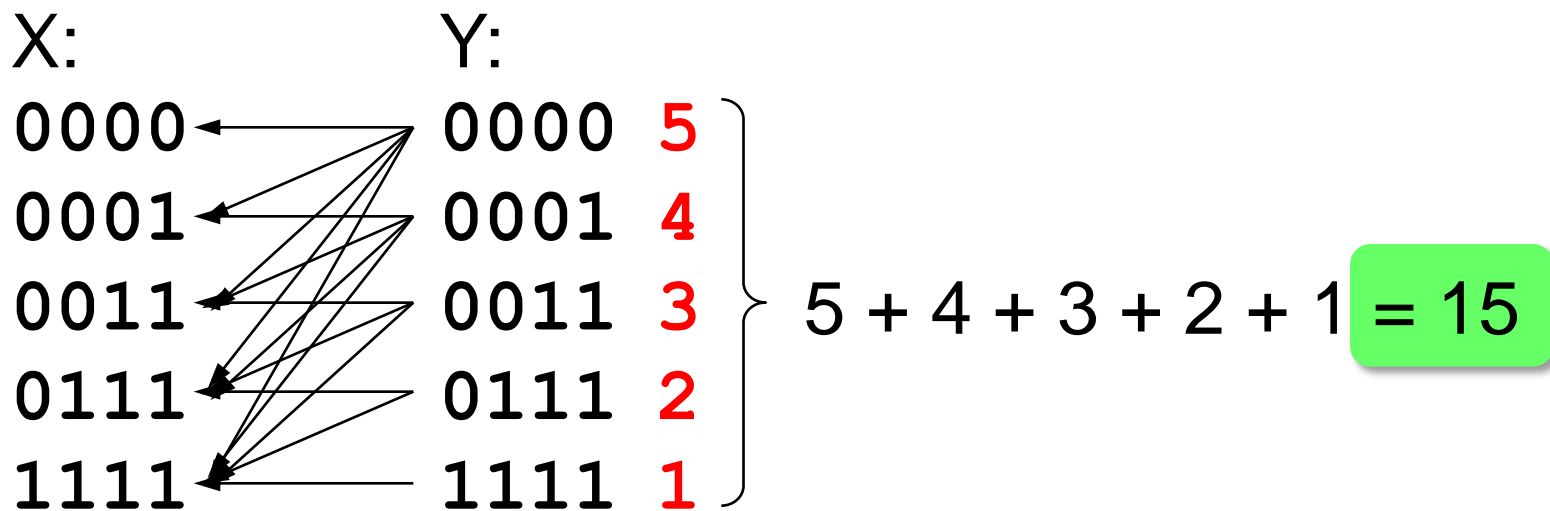
$$(y_1 \rightarrow x_1) \cdot (y_2 \rightarrow x_2) \cdot (y_3 \rightarrow x_3) \cdot (y_4 \rightarrow x_4) = 1$$

$$y_i = 1 \Rightarrow x_i = 1$$

$$y_i = 0 \Rightarrow x_i = \{0, 1\} \text{ без ограничений!}$$



# Демо-вариант ЕГЭ-2013



## Демо-вариант ЕГЭ-2014

$$(x_1 \neq x_2) \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_3) = 0$$

$$(x_2 \neq x_3) \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \cdot x_4) = 0$$

...

$$(x_8 \neq x_9) \cdot (x_8 \cdot \bar{x}_{10} + \bar{x}_8 \cdot x_{10}) = 0$$

$$(x_1 \neq x_2) \cdot (x_1 \neq x_3) = 0$$

$$(x_2 \neq x_3) \cdot (x_2 \neq x_4) = 0$$

...

$$(x_8 \neq x_9) \cdot (x_8 \neq x_{10}) = 0$$



Как перевести на русский язык?

# Демо-вариант ЕГЭ-2014

$$(x_i \neq x_{i+1}) \cdot (x_i \neq x_{i+2}) = 0$$

«очередной бит равен хотя бы одному из 2-х следующих»

«запрещены комбинации **100** и **011**»

«после 01 или 10 биты чередуются»

- 1) сначала цепочка нулей, потом биты чередуются (1/0)
- 2) сначала цепочка единиц, потом биты чередуются.

0000000000	1111111111	}	10 + 10 = 20
0000000001	1111111110		
0000000010	1111111101		
00000000101	1111111010		
...	...		
0101010101	1010101010		

## Демо-вариант ЕГЭ-2015

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \cdot (\bar{x}_1 + y_1) = 1$$

$$(x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (\bar{x}_2 + y_2) = 1$$

...

$$(x_6 + x_7) \cdot (x_6 \cdot x_7 \rightarrow x_8) \cdot (\bar{x}_6 + y_6) = 1$$

$$(x_7 + x_8) \cdot (\bar{x}_7 + y_7) = 1$$

$$\bar{x}_8 + y_8 = 1$$

$$x_i + x_{i+1} = 1$$

«запрещено 00»

$$(x_i \cdot x_{i+1} \rightarrow x_{i+2}) = 1$$

«после двух единиц  
идут только единицы»

Если не трогать  $Y$ :

«ГОЛОВА»

«ХВОСТ»

	0	1	1	...	1
--	---	---	---	-----	---

«запрещено 00 и 11»

«биты чередуются»

## Демо-вариант ЕГЭ-2015

Варианты отличаются местом последнего нуля:

11111111, 01111111, 10111111, 01011111, 10101111,  
01010111, 10101011, 01010101, 10101010

**Учитываем  $Y$ :**

$$\bar{x}_i + y_i = 1 \quad x_i \rightarrow y_i = 1$$

$$x_i = 1 \Rightarrow y_i = 1 \quad 1 \text{ решение}$$

$$x_i = 0 \Rightarrow y_i = \{0, 1\} \quad 2 \text{ решения}$$

01011111    2 нулевых бита,  $2^2$  вариантов

$$K_8 = 2^0 + 2 \cdot (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 61$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2019

$$(y_1 \rightarrow y_2 \cdot x_1)(x_1 \rightarrow x_2) = 1$$

$$(y_2 \rightarrow y_3 \cdot x_2)(x_2 \rightarrow x_3) = 1$$

...

$$(y_6 \rightarrow y_7 \cdot x_6)(x_6 \rightarrow x_7) = 1$$

$$y_7 \rightarrow x_7 = 1$$

$$a \rightarrow (b \cdot c) = (a \rightarrow b) \cdot (b \rightarrow c)$$

$$(y_i \rightarrow y_{i+1} \cdot x_i) =$$

$$= (y_i \rightarrow y_{i+1}) \cdot (y_i \rightarrow x_i)$$

$$(x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_6 \rightarrow x_7) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2)(y_2 \rightarrow y_3) \cdot \dots \cdot (y_6 \rightarrow y_7) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow x_1)(y_2 \rightarrow x_2) \cdot \dots \cdot (y_7 \rightarrow x_7) = 1$$

# Демо-вариант ЕГЭ-2019

$$(x_i \rightarrow x_{i+1}) \cdot (y_i \rightarrow x_i) \cdot (y_i \rightarrow y_{i+1}) = 1$$

только  $x$

уравнения связи

только  $y$

Все X-решения:

```
0000000
0000001
0000011
0000111
0001111
0011111
0011111
0111111
1111111
```



Как стыкуются?

Все Y-решения:

```
0000000
0000001
0000011
0000111
0001111
0011111
0011111
0111111
1111111
```

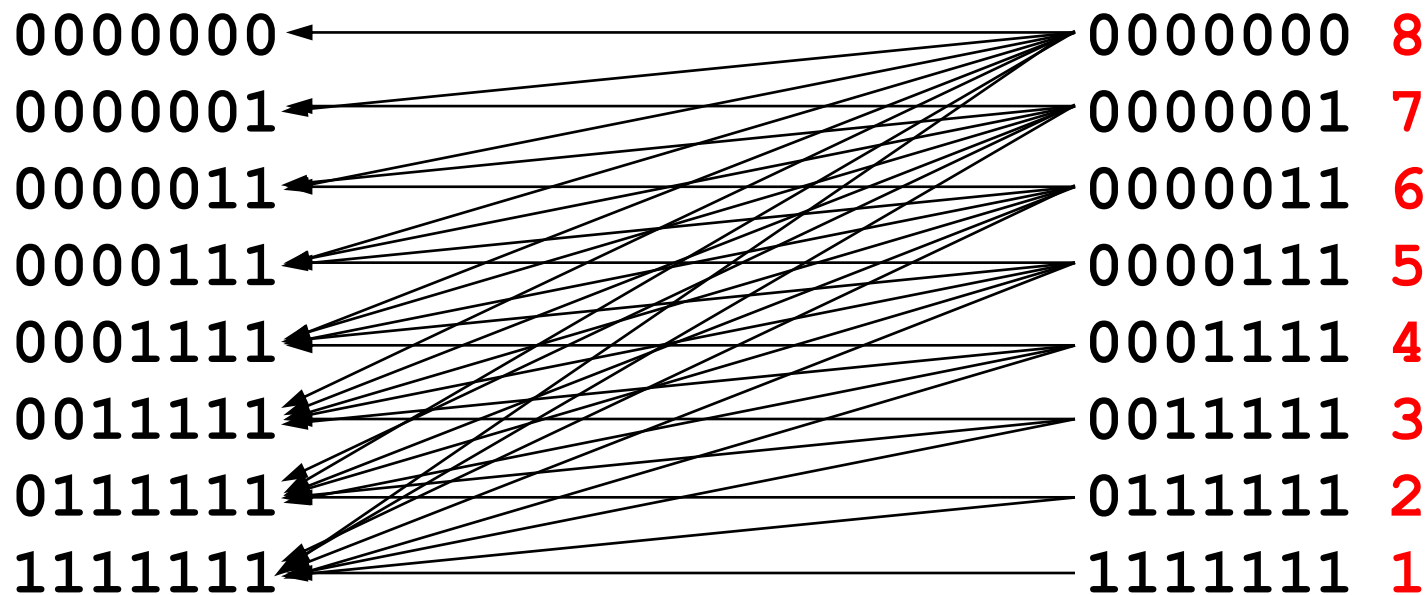
# Демо-вариант ЕГЭ-2019

$$y_i \rightarrow x_i \quad y_i = 0 \rightarrow x_i = \{0, 1\}$$

$$y_i = 1 \rightarrow x_i = 1$$

Все X-решения:

Все Y-решения:



$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$



# Демо-вариант ЕГЭ-2017

$$(x_1 \rightarrow (x_2 \cdot y_1)) \cdot (y_1 \rightarrow y_2) = 1$$

$$(x_2 \rightarrow (x_3 \cdot y_2)) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) = 1$$

...

$$(x_5 \rightarrow (x_6 \cdot y_5)) \cdot (y_5 \rightarrow y_6) = 1$$

$$x_6 \rightarrow y_6 = 1$$

$$x_i \rightarrow (x_{i+1} \cdot y_i) = 1$$



$$\begin{cases} x_i \rightarrow x_{i+1} = 1 \\ x_i \rightarrow y_i = 1 \end{cases}$$

Группировка по вертикали:

$$(x_1 \rightarrow (x_2 \cdot y_1)) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow (x_6 \cdot y_5)) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot \dots \cdot (y_5 \rightarrow y_6) = 1$$

$$x_6 \rightarrow y_6 = 1$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2017

---

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot \dots \cdot (y_5 \rightarrow y_6) = 1$$

$$(x_1 \rightarrow y_1) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1$$

### Решение:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111, 111111

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot \dots \cdot (y_5 \rightarrow y_6) = 1$$

000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111, 111111

# Демо-вариант ЕГЭ-2017

---

## Уравнение связи:

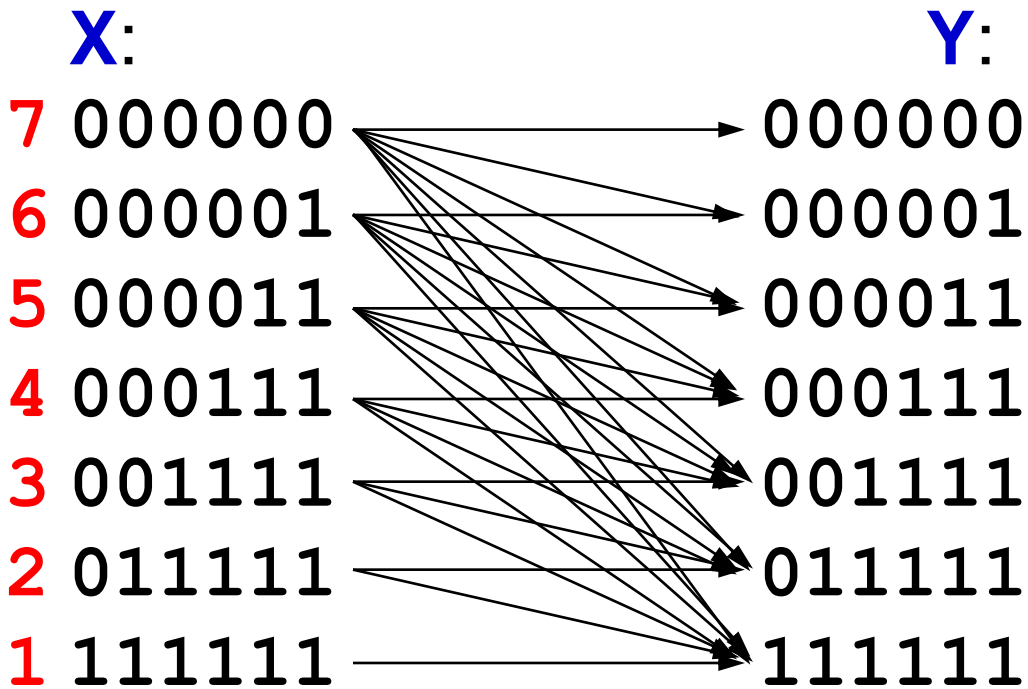
$$(x_1 \rightarrow y_1) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1$$

Ограничения:

$$x_i = 0 \Rightarrow y_i = \{0, 1\} \text{ без ограничений!}$$

$$x_i = 1 \Rightarrow y_i = 1$$

# Демо-вариант ЕГЭ-2017



$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

## Демо-вариант ЕГЭ-2018

$$(\bar{x}_1 + y_1) \rightarrow (\bar{x}_2 \cdot y_2) = 1$$

$$(\bar{x}_2 + y_2) \rightarrow (\bar{x}_3 \cdot y_3) = 1$$

...

$$(\bar{x}_6 + y_6) \rightarrow (\bar{x}_7 \cdot y_7) = 1$$

$$(\bar{x}_i + y_i) \rightarrow (\bar{x}_{i+1} \cdot y_{i+1}) = 1$$



$$a \rightarrow (b \cdot c) = (a \rightarrow b) \cdot (b \rightarrow c)$$

$$((\bar{x}_i + y_i) \rightarrow \bar{x}_{i+1}) \cdot ((\bar{x}_i + y_i) \rightarrow y_{i+1}) = 1$$

# Демо-вариант ЕГЭ-2018

$$((\bar{x}_i + y_i) \rightarrow \bar{x}_{i+1}) \cdot ((\bar{x}_i + y_i) \rightarrow y_{i+1}) = 1$$



$$a \rightarrow b = \bar{b} \rightarrow \bar{a}$$

$$(x_{i+1} \rightarrow x_i \cdot \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_{i+1} \rightarrow x_i \cdot \bar{y}_i) = 1$$

$$(x_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (x_{i+1} \rightarrow \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (\bar{y}_{i+1} \rightarrow \bar{y}_i) = 1$$

$$(x_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (x_{i+1} \rightarrow \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (y_i \rightarrow y_{i+1}) = 1$$

# Демо-вариант ЕГЭ-2018

$$(x_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (x_{i+1} \rightarrow \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (y_i \rightarrow y_{i+1}) = 1$$

ТОЛЬКО  $x$

уравнения связи

ТОЛЬКО  $y$

Все X-решения:

```
0000000
1000000
1100000
1110000
1111000
1111100
1111110
1111111
```



Как стыкуются?

Все Y-решения:

```
0000000
0000001
0000011
0000111
0001111
0011111
0111111
1111111
```

# Демо-вариант ЕГЭ-2018

$$(\bar{y}_{i+1} \rightarrow x_i) \cdot (x_{i+1} \rightarrow \bar{y}_i) = 1$$

$$x_i = 0 \Rightarrow y_{i+1} = 1 \quad \text{---} \quad x_i = 1 \Rightarrow y_{i-1} = 0$$

Все X-решения:

Все Y-решения:

2	0000000	*111111	→	0000000
3	1000000	**11111	→	0000001
3	1100000	0**1111	→	0000011
3	1110000	00**111	→	0000111
3	1111000	000**11	→	0001111
3	1111100	0000**1	→	0011111
3	1111110	00000**	→	0111111
2	1111111	000000*	→	1111111

$$2+3+3+3+3+3+3+2 = 22$$



## Ещё одна задача (2015)

$$(x_1 + y_1) \cdot (x_2 \cdot y_2 \rightarrow x_1 \cdot y_1) = 1$$

$$(x_2 + y_2) \cdot (x_3 \cdot y_3 \rightarrow x_2 \cdot y_2) = 1$$

...

$$(x_6 + y_6) \cdot (x_7 \cdot y_7 \rightarrow x_6 \cdot y_6) = 1$$

$$x_7 + y_7 = 1$$

**Замена переменных:**

$$z_1 = x_1 \cdot y_1 \quad z_2 = x_2 \cdot y_2$$

...

$$z_6 = x_6 \cdot y_6$$

$$z_2 \rightarrow z_1 = 1$$

$$z_3 \rightarrow z_2 = 1$$

...

$$z_7 \rightarrow z_6 = 1$$

## Ещё одна задача (2015)

$$z_2 \rightarrow z_1 = 1$$

$$z_3 \rightarrow z_2 = 1$$

...

$$z_7 \rightarrow z_6 = 1$$

$$(z_2 \rightarrow z_1) \cdot (z_3 \rightarrow z_2) \cdot \dots \cdot (z_7 \rightarrow z_6) = 1$$

**Решение:**  $Z = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7$

«запрещена комбинация 01»

«все единицы, потом – все нули»

8 решений: 0000000

1000000

1100000

1110000

1111000

1111100

1111110

1111111



Но в  $z_i!$

## Ещё одна задача (2015)

$$\begin{cases} z_i = x_i \cdot y_i = 0 \\ x_i + y_i = 1 \end{cases} \quad 2 \text{ решения: } (0;1) \text{ и } (1;0)$$



Каждый 0 удваивает количество решений!

$$\begin{cases} z_i = x_i \cdot y_i = 1 \\ x_i + y_i = 1 \end{cases} \quad 1 \text{ решение: } (1;1)$$

Z	X,Y	Z	X,Y
0000000	<b>128</b>	1111000	<b>8</b>
1000000	<b>64</b>	1111100	<b>4</b>
1100000	<b>32</b>	1111110	<b>2</b>
1110000	<b>16</b>	1111111	<b>1</b>

$$128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{255}$$

## Пробное тестирование (2015)

$$(x_1 \cdot y_1) \equiv (\bar{x}_2 + \bar{y}_2)$$

$$(x_2 \cdot y_2) \equiv (\bar{x}_3 + \bar{y}_3)$$

...

$$(x_5 \cdot y_5) \equiv (\bar{x}_6 + \bar{y}_6)$$

**Замена переменных:**

$$z_1 = (x_1 \cdot y_1)$$

$$z_2 = (x_2 \cdot y_2)$$

...

$$z_6 = (x_6 \cdot y_6)$$

$$(z_1 \neq z_2) \cdot (z_2 \neq z_3) \cdot \dots \cdot (z_5 \neq z_6) = 1$$

«биты чередуются»      Решения: 010101, 101010

$$z_i = 1 \Rightarrow (x_i, y_i) = (1,1)$$

Ответ:  $3^3 + 3^3 =$  **54**

$$z_i = 0 \Rightarrow (x_i, y_i) = (0,0)(0,1)(1,0)$$

## Ещё одна задача (2016)

$$((x_1 \equiv y_1) \rightarrow (x_2 \equiv y_2)) \cdot (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (y_1 \rightarrow y_2) = 1$$

$$((x_2 \equiv y_2) \rightarrow (x_3 \equiv y_3)) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) = 1$$

...

$$((x_7 \equiv y_7) \rightarrow (x_8 \equiv y_8)) \cdot (x_7 \rightarrow x_8) \cdot (y_7 \rightarrow y_8) = 1$$

### В другой форме:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_7 \rightarrow x_8) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot \dots \cdot (y_7 \rightarrow y_8) = 1$$

$$((x_1 \equiv y_1) \rightarrow (x_2 \equiv y_2)) \cdot \dots \cdot ((x_7 \equiv y_7) \rightarrow (x_8 \equiv y_8)) = 1$$



Все нули,  
потом 1!

Ограничения

## Ещё одна задача (2016)

X		Y
00000000		00000000
00000001	<div style="display: inline-block; border: 2px solid blue; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; background-color: white; text-align: center; line-height: 40px; color: blue; font-size: 24px; font-weight: bold;">?</div> <div style="display: inline-block; background-color: #d9e1f2; padding: 5px; margin-left: 10px;">Как стыкуются?</div>	00000001
...		...
11111111		11111111

**Ограничение:**  $(x_i \equiv y_i) \rightarrow (x_{i+1} \equiv y_{i+1}) = 1$

**Запрещено:**  $x_i \equiv y_i$  и  $x_{i+1} \not\equiv y_{i+1}$

Получим ~~10!~~

(0,0)	(1,0) или (0,1)
<del>(1,1)</del>	

Если есть 0,  
то  $X=Y$ !

$X=11111111$  стыкуется со всеми! ( $N+1$  решений)

остальные – только с равными и с  $Y=11111111$ !

( $+2N$  решений)

Ответ:  $(8+1)+2 \cdot 8 = 25$

## Ещё одна задача (2018)

$$(x_1 \equiv x_2) \equiv (y_1 \equiv y_2) = 1$$

$$(x_2 \equiv x_3) \equiv (y_2 \equiv y_3) = 1$$

...

$$(x_6 \equiv x_7) \equiv (y_6 \equiv y_7) = 1$$

$$(x_1 \equiv y_1) \equiv (x_2 \equiv y_2) = 1$$

$$(x_2 \equiv y_2) \equiv (x_3 \equiv y_3) = 1$$

...

$$(x_6 \equiv y_6) \equiv (x_7 \equiv y_7) = 1$$



Замена переменных???

$$(x_1 \equiv x_2) \equiv (y_1 \equiv y_2) = 1$$

Если  $x_1 \equiv y_1$ , то  $x_2 \equiv y_2$

Если  $x_1 \not\equiv y_1$ , то  $x_2 \not\equiv y_2$

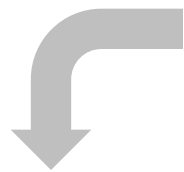
$$(x_1 \equiv y_1) \equiv (x_2 \equiv y_2) = 1$$

$$z_i = (x_i \equiv y_i)$$

## Ещё одна задача(2018)

$$z_i = (x_i \equiv y_i) \rightarrow \begin{aligned} (z_1 \equiv z_2) &= 1 \\ (z_2 \equiv z_3) &= 1 \end{aligned}$$

...



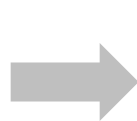
$$(z_6 \equiv z_7) = 1$$

$$(z_1 \equiv z_2) \cdot (z_2 \equiv z_3) \cdot \dots \cdot (z_6 \equiv z_7) = 1$$

**Решения:**  $Z = 0000000, 1111111$

$$z_i = 0 \Rightarrow (0,1) \quad (1,0)$$

$$z_i = 1 \Rightarrow (0,0) \quad (1,1)$$



0 и 1 удваивают число решений!

$$2^7 + 2^7 = \mathbf{256}$$



## Основные шаги решения

---

- 1) упрощение уравнений с помощью эквивалентных преобразований
- 2) замена переменных (если возможно)
- 3) исследование структуры всех решений («голова+хвост»)
- 4) подсчёт количества решений по формулам комбинаторики

## Как можно рассказать детям?

---

$$1) (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) = 1$$

$$2) (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) = 0$$

$$3) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$4) x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 1$$

$$5) (x_1 \equiv x_2) \cdot (x_2 \equiv x_3) \cdot \dots \cdot (x_9 \equiv x_{10}) = 1$$

$$6) (x_1 \not\equiv x_2) \cdot (x_2 \not\equiv x_3) \cdot \dots \cdot (x_9 \not\equiv x_{10}) = 1$$

$$7) (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot \dots \cdot (x_9 \rightarrow x_{10}) = 1$$

## Как можно рассказать детям (II)?

---

$$8) (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$9) (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) \cdot (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$x_2 \rightarrow y_3 = 1$$

## Как можно рассказать детям (III)?

---

$$10) (x_1 \neq y_1) \equiv (x_2 \equiv y_2)$$

$$(x_2 \neq y_2) \equiv (x_3 \equiv y_3)$$

...

$$(x_8 \neq y_8) \equiv (x_9 \equiv y_9)$$

**Демо-2016**

$$11) (x_1 \cdot y_1) \equiv (\bar{x}_2 + \bar{y}_2)$$

$$(x_2 \cdot y_2) \equiv (\bar{x}_3 + \bar{y}_3)$$

...

$$(x_5 \cdot y_5) \equiv (\bar{x}_6 + \bar{y}_6)$$

**Пробное  
тестирование**

# Конец фильма

---

**ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич**

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

[kpolyakov@mail.ru](mailto:kpolyakov@mail.ru)

**РОЙТБЕРГ Михаил Абрамович**

д.ф.-м.н., зав. кафедрой АТП ФИВТ МФТИ,  
зам. руководителя Федеральной комиссии по  
разработке КИМ ЕГЭ по информатике и ИКТ

[mroytberg@lpm.org.ru](mailto:mroytberg@lpm.org.ru)